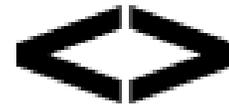


Решение иррациональных неравенств

Выполнил учитель математики: Корнилов Д.Я

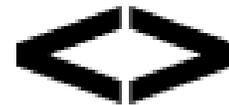
Цель работы

изучения иррациональных неравенств.



Задачи :

- Изучить основные понятия и определения.
- Рассмотреть теоретические основы решения иррациональных неравенств, различные методы и приемы.
- Изучить примеры задач, предложить методы их решения.
- Провести анализ полученных результатов и сделать выводы о применимости изученных методов и приемов решения иррациональных неравенств.

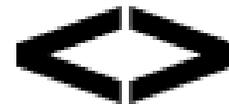


Объект исследования

Иррациональные неравенства

Предмет исследования

различные виды ИН
и методы их решения.



Иррациональное неравенство-

v v

Это Неравенство, содержащее
неизвестные величины или некоторые
функции неизвестных величин под знаком
радикала.

Иррациональные неравенства

$\sqrt{f(x)} \mathcal{V} g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ - некоторые функции переменной x ,
 \mathcal{V} – знак сравнения ($<$, \leq , $>$, \geq).

Примеры иррациональных неравенств: $\sqrt{x-1} < 2-x$.

Для того, чтобы решить иррациональное неравенство, необходимо найти множество всех значений переменной, которые удовлетворяют данному неравенству. Это множество называется множеством решений неравенства.

Методы решения Иррациональных Неравенств

Способ решения неравенств состоит в преобразовании их к рациональным неравенствам.

1. Метод сведения к эквивалентной системе или совокупности рациональных неравенств;
2. Умножение обеих частей неравенства на сопряженное выражение;
3. Метод введения новой переменной;
4. Решение иррациональных неравенств с использованием свойств входящих в них функций:
 - *Использование монотонности функции*
 - *Использование ОДЗ*
 - *Использование ограниченности функций*
 - *Использование графиков функций*

Наиболее простые иррациональные неравенства имеют вид:

- 1) $\sqrt{A(x)} < B(x)$ или $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$,
- 2) $\sqrt{A(x)} > B(x)$ или $\sqrt{A(x)} \geq B(x)$,
- 3) $\sqrt{A(x)} < \sqrt{B(x)}$ или $\sqrt{A(x)} \leq \sqrt{B(x)}$.

При решении иррациональных неравенств следует запомнить правила:

- **при возведении обеих частей неравенства в нечетную степень всегда получается неравенство, равносильное данному неравенству.**
- **если обе части неравенства возводят в четную степень, то получится неравенство, равносильное исходному только в том случае, если обе части исходного неравенства неотрицательны.**

Например, возведя в квадрат:

- верное** неравенство $-2 < 3$, мы получим **верное** неравенство $4 < 9$;
- верное** неравенство $-3 < 2$, мы получим **неверное** неравенство $9 < 4$;
- неверное** неравенство $2 < -3$, мы получим **верное** неравенство $4 < 9$;
- неверное** неравенство $3 < 2$, мы получим **неверное** неравенство $9 < 4$.

Метод сведения к эквивалентной системе или совокупности рациональных неравенств

Иррациональное неравенство

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x)$$

или $\sqrt[n]{A(x)} \leq B(x), n \in \mathbb{N}$.

Если n – нечетно, то данное неравенство

равносильно неравенству $\sqrt{A(x)} <$

$B^n(x)$ или $\sqrt{A(x)} \leq B^n(x)$ решая которое, находим решения исходного неравенства.

Если n – четно, то в силу не

отрицательности выражения $\sqrt[n]{A(x)}$

неравенства такого вида решают, переходя к системе трех неравенств:

$$\begin{cases} A(x) < B^n(x), \\ A(x) \geq 0, \\ B(x) \geq 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A(x) \leq B^n(x), \\ A(x) \geq 0, \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$$

Иррациональное неравенство

$$\sqrt[n]{A(x)} > B(x) \text{ или } \sqrt[n]{A(x)} \geq B(x), n \in \mathbb{N}.$$

Если n – нечетно, то данное неравенство

равносильно неравенству $\sqrt{A(x)} >$

$B^n(x)$ или $\sqrt{A(x)} \geq B^n(x)$, решая которое, находим решения исходного неравенства.

Если n – четно, то в силу не

отрицательности выражения $\sqrt[n]{A(x)}$

неравенства такого вида решают, переходя к совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} A(x) > B^n(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A(x) \geq B^n(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$$
$$\begin{cases} A(x) \geq 0, \\ B(x) < 0. \end{cases}$$



возведение в степень обеих частей неравенства

Иррациональное неравенство

$$\sqrt[n]{A(x)} < \sqrt[n]{B(x)} \text{ или } \sqrt[n]{A(x)} \leq \sqrt[n]{B(x)}, n \in N.$$

Если n – нечетно, то данное неравенство равносильно неравенству $A(x) < B(x)$ или $A(x) \leq B(x)$, решая которое, находим решения исходного неравенства.

Если n – четно, то нужно переходить к системе:

$$\begin{cases} A(x) > B(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} A(x) \geq B(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$$

Остальные методы решения ИН:

- **Умножение обеих частей неравенства на сопряженное выражение:**

- В ряде задач вместо возведения в квадрат, приводящего к слишком громоздким выражениям, разумнее умножить обе части неравенства на выражение, сопряженное одной из них.

- **Метод введения новой переменной:**

- Введение новой переменной применяется в том случае, если в уравнении неравенстве неоднократно встречается некоторое выражение, зависящее от неизвестной величины.

- **Решение иррациональных неравенств с использованием свойств входящих в них функций:**

- Аналитического обоснования свойств функции решения - это вопрос опыта и интуиции. Например: Графический способ даёт приближённое решение, поэтому всегда требует проверки.



Решение простейших ИН

Пример 1. Решить неравенство $\sqrt{5x - 10} > 1$

Решение. Запишем равносильную ему систему рациональных неравенств:

$$\begin{cases} 5x - 10 < 1^2, \\ 5x - 10 \geq 0. \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x < \frac{11}{5}, \\ x \geq 2. \end{cases}$$

Условие $B(x) = 1 \geq 0$ выполнено при всех x , и нет необходимости добавлять его к выписанной системе.

Ответ: $\left[2; \frac{11}{5}\right)$

Решение более сложных ИН

Рассмотрим решение иррациональных неравенств следующего вида

$$\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)} < C(x)$$

Поскольку $A(x) \geq 0$, $B(x) \geq 0$, то должны выполняться условия $A(x) \geq 0$, $B(x) \geq 0$, $\sqrt{B(x)} < C(x)$ (соответственно $\sqrt{A(x)} < C(x)$). На множестве, где эти условия выполняются, данное неравенство равносильно неравенству $A(x) < (C(x) - \sqrt{B(x)})^2$ (соответственно неравенству $B(x) < (C(x) - \sqrt{A(x)})^2$), которое сводится к разобранным выше типам неравенств.

Решение более сложных ИН

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x - 2} > 2$

Решение. Перенесем второй радикал в правую часть, чтобы обе части неравенства стали неотрицательными, и его можно было возвести в квадрат:

$$\sqrt{2x + 3} > \sqrt{x - 2} + 2 \Rightarrow$$

$$2x + 3 > x - 2 + 4\sqrt{x - 2} + 4 \Rightarrow$$

$$x + 1 > 4\sqrt{x - 2}.$$

Мы пришли к простейшему стандартному неравенству, равносильно системе:

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ x + 1 > 0, \\ 16(x - 2) < x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x^2 - 14x + 33 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ \begin{cases} x < 3, \\ x < 11. \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$2 \leq x < 3$$

Ответ: $[2; 3)$

Решение более сложных ИН

Пример 3. Решение неравенства $x^2 + 14x + 9 + 8\sqrt{-x^2 - 14x - 24} \leq 0$

Решение. $x^2 + 14x + 24 - 15 + 8\sqrt{-x^2 - 14x - 24} \leq 0$

Обозначим $\sqrt{-x^2 - 14x - 24} = t \Rightarrow -t^2 - 15 + 8t \leq 0 \Rightarrow t^2 + 15 - 8t \geq 0 \Rightarrow (t-3)(t-5) \geq 0$

1) способ. $(\sqrt{-x^2 - 14x - 24} - 3)(\sqrt{-x^2 - 14x - 24} - 5) \geq 0$

$$\begin{cases} (-x^2 - 14x - 33)(-x^2 - 14x - 49) \geq 0 \\ -x^2 - 14x - 24 \geq 0 \\ \Rightarrow x^2 + 14x + 24 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+3)(x+11)(x-7)^2 \geq 0 \\ (x+2)(x+12) \leq 0 \end{cases}$$

2) способ: вместо рационализации, сначала определить область значений относительно t , $\begin{cases} t \geq 5 \\ t \leq 3 \end{cases} \Rightarrow$

обратная замена и рационализация $\begin{cases} \sqrt{-x^2 - 14x - 24} \geq 5 \\ \sqrt{-x^2 - 14x - 24} \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2 - 14x - 24 \geq 25 \\ 0 \leq -x^2 - 14x - 24 \leq 9 \end{cases} - 25 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x^2 + 14x + 49 \leq 0 \\ 16 \leq x^2 + 14x + 49 \leq 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+7)^2 \leq 0 \\ 16 \leq (x+7)^2 \leq 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4 \leq x+7 \leq 5 \\ -5 \leq x+7 \leq -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ -3 \leq x \leq -2 \\ -12 \leq x+7 \leq -11 \end{cases}$$

Ответ: $[-12; -11] \cup [-7] \cup [-3; -2]$

Решение примера из ЕГЭ

Пример 4. Задание №14

Решите неравенства. $\frac{\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}}{x^2+x-1} \leq 0,$

Равносильная система:

Возводим в квадрат неравенство $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \geq 0, \\ x^2 + x \geq 0, \\ \frac{(x^2-2x+1)-(x^2+x)}{x^2+x-1} \leq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 \geq 0, \\ x(1+x) \geq 0, \\ \frac{3x-1}{x^2+x-1} \leq 0, \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x \in R, \\ x \geq 0, \\ x \leq -1, \\ \frac{-\sqrt{5}-1}{2} < x \leq \frac{1}{3}, \\ x > \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}; -1\right] \cup \left[0; \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right).$

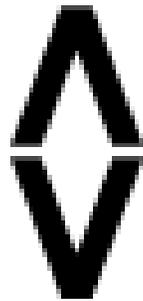
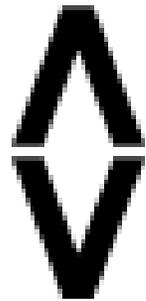
Заключение

v

v

Иррациональные неравенства – довольно сложный раздел школьного курса математики, и на его изучение отведено крайне мало времени, то становится ясно, что учащиеся как правило этот раздел усваивают с трудом.

В данном исследовании были рассмотрены основные методы решения иррациональных неравенств. Мы начали с определения иррациональных выражений, а затем перешли к решению иррациональных неравенств с помощью различных методов.



v
v
v

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

