# Решение иррациональных неравенств

Выполнил учитель математики: Корнилов Д.Я

# Цель работы

[redacted] изучения иррациональных неравенств.

## Задачи :

- Изучить основные понятия и определения.
- Рассмотреть теоретические основы решения иррациональных неравенств, различные методы и приемы.
- Изучить примеры задач, предложить методы их решения.
- Провести анализ полученных результатов и сделать выводы о применимости изученных методов и приемов решения иррациональных неравенств.

## Объект исследования

Иррациональные неравенства

## Предмет исследования

различные виды ИН

и методы их решения.

# Иррациональное неравенство-

Это Неравенство, содержащее неизвестные величины или некоторые функции неизвестных величин под знаком радикала.

# Иррациональные неравенства

$\sqrt{f(x)}\,\mathrm{V}\,g(x)$, где f(x) и g(x) - некоторые функции переменной x,

$V$ – знак сравнения($<$, $\leq$, $>$, $\geq$).

Примеры иррациональных неравенств: $\sqrt{x-1} < 2-x$ .

**Для того, чтобы решить иррациональное неравенство, необходимо найти множество всех значений переменной, которые удовлетворяют данному неравенству. Это множество называется множеством решений неравенства.**

# Методы решения Иррациональных Неравенств

**Способ решения неравенств состоит в преобразовании их к рациональным неравенствам.**

1. Метод сведения к эквивалентной системе или совокупности рациональных неравенств;
2. Умножение обеих частей неравенства на сопряженное выражение;
3. Метод введения новой переменной;
4. Решение иррациональных неравенств с использованием свойств входящих в них функций:
   - *Использование монотонности функции*
   - *Использование ОДЗ*
   - *Использование ограниченности функций*
   - *Использование графиков функций*

**Наиболее простые иррациональные неравенства имеют вид:**

1) $\sqrt{A(x)} < B(x)$ или $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$,

2) $\sqrt{A(x)} > B(x)$ или $\sqrt{A(x)} \geq B(x)$,

3) $\sqrt{A(x)} < \sqrt{B(x)}$ или $\sqrt{A(x)} \leq \sqrt{B(x)}$.

**При решении иррациональных неравенств следует запомнить правила:**

- ***при возведении обеих частей неравенства в нечетную степень всегда получается неравенство, равносильное данному неравенству.***
- ***если обе части неравенства возводят в четную степень, то получится неравенство, равносильное исходному только в том случае, если обе части исходного неравенства неотрицательны.***

**Например, возведя в квадрат:**

-***верное*** **неравенство -2<3, мы получим** ***верное*** **неравенство 4<9;**
-***верное*** **неравенство -3<2, мы получим** ***неверное*** **неравенство 9<4;**
-***неверное*** **неравенство 2<-3, мы получим** ***верное*** **неравенство 4<9;**
-***неверное*** **неравенство 3<2, мы получим** ***неверное*** **неравенство 9<4.**

# Метод сведения к эквивалентной системе или совокупности рациональных неравенств

Иррациональное неравенство

$$\sqrt[n]{A(x)} < B(x)$$

или $\sqrt[n]{A(x)} \leq B(x), n \in N.$

Если n – нечетно, то данное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{A(x)} <$ $B^n(x)$ или $\sqrt{A(x)} \leq B^n(x)$ решая которое, находим решения исходного неравенства.

Если n – четно, то в силу не отрицательности выражения $\sqrt[n]{A(x)}$ неравенства такого вида решают, переходя к системе трех неравенств:

$$\begin{cases} A(x) < B^n(x), \\ A(x) \geq 0, \\ B(x) \geq 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A(x) \leq B^n(x), \\ A(x) \geq 0, \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$$

Иррациональное неравенство

$\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$ или $\sqrt[n]{A(x)} \geq B(x), n \in N.$

Если n – нечетно, то данное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{A(x)} >$ $B^n(x)$ или $\sqrt{A(x)} \geq B^n(x)$, решая которое, находим решения исходного неравенства.

Если n – четно, то в силу не отрицательности выражения $\sqrt[n]{A(x)}$ неравенства такого вида решают, переходя к совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} A(x) > B^n(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases} \\ \begin{cases} A(x) \geq 0, \\ B(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A(x) \geq B^n(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases} \\ \begin{cases} A(x) \geq 0, \\ B(x) \leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

**возведение в степень обеих частей неравенства**

## Иррациональное неравенство

$\sqrt[n]{A(x)} < \sqrt[n]{B(x)}$ или $\sqrt[n]{A(x)} \leq \sqrt[n]{B(x)}, n \in N.$

Если n – нечетно, то данное неравенство равносильно неравенству $A(x) < B(x)$ или $A(x) \leq B(x)$, решая которое, находим решения исходного неравенства.

Если n – четно, то нужно переходить к системе:

$$\begin{cases} A(x) > B(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} A(x) \geq B(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$$

# Остальные методы решения ИН:

- **Умножение обеих частей неравенства на сопряженное выражение:**

-В ряде задач вместо возведения в квадрат, приводящего к слишком громоздким выражениям, разумнее умножить обе части неравенства на выражение, сопряженное одной из них.

- **Метод введения новой переменной:**

- Введение новой переменной применяется в том случае, если в уравнении неравенстве неоднократно встречается некоторое выражение, зависящее от неизвестной величины.

- **Решение иррациональных неравенств с использованием свойств входящих в них функций:**

- Аналитического обоснования свойств функции решения - это вопрос опыта и интуиции.
Например: Графический способ даёт приближённое решение,
поэтому всегда требует проверки.

# Решение простейших ИН

**Пример 1.** Решить неравенство $\sqrt{5x-10} > 1$

**Решение.** Запишем равносильную ему систему рациональных неравенств:

$$\begin{cases} 5x - 10 < 1^2, \\ 5x - 10 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \dfrac{11}{5}, \\ x \geq 2. \end{cases}$$

Условие $B(x) = 1 \geq 0$ выполнено при всех $x$, и нет необходимости добавлять его к выписанной системе.

**Ответ:** $\left[2; \frac{11}{5}\right)$

# Решение более сложных ИН

Рассмотрим решение иррациональных неравенств следующего вида

$$\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)} < C(x)$$

**Поскольку $A(x) \geq 0$ , $B(x) < 0$, то должны выполнятся условия $A(x) \geq 0$, $B(x) \geq 0$ , $\sqrt{B(x)} < C(x)$ (соответственно $\sqrt{A(x)} < C(x)$). На множестве, где эти условия выполняются, данное неравенство равносильно неравенству $A(x) < (C(x) - \sqrt{B(x)})^2$ (соответственно неравенству $B(x) < (C(x) - \sqrt{A(x)})^2$ ), которое сводится к разобранным выше типам неравенств.**

# Решение более сложных ИН

**Пример 2.** Решить неравенство $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}>2$

**Решение**. Перенесем второй радикал в правую часть, чтобы обе части неравенства стали неотрицательными, и его можно было возвести в квадрат:

$$\sqrt{2x+3}>\sqrt{x-2}+2 \Rightarrow$$

$$2x+3>x-2+4\sqrt{x-2}+4 \Rightarrow$$

$$x+1>4\sqrt{x-2}.$$

Мы пришли к простейшему стандартному неравенству, равносильно системе:

$$\begin{cases} x-2\geq 0, \\ x+1>0, \\ 16(x-2)<x^2+2x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 2, \\ x^2-14x+33>0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x\geq 2, \\ \left[ \begin{cases} x<3, \\ x<11. \end{cases} \right. \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$2\leq x<3$$

**Ответ:** $[2;3)$

# Решение более сложных ИН

**Пример 3.** Решение неравенства $x^2+14x+9+8\sqrt{-x^2-14x-24}\le 0$

**Решение.** $x^2+14x+24-15+8\sqrt{-x^2-14x-24}\le 0$

Обозначим $\sqrt{-x^2-14x-24}=t \Rightarrow -t^2-15+8t\le 0 \Rightarrow t^2+15-8t\ge 0 \Rightarrow$(t-3)(t-5) $\ge 0$

1) способ: $(\sqrt{-x^2-14x-24}-3)(\sqrt{-x^2-14x-24}-5)\ge 0$

$$\begin{cases}(-x^2-14x-33)(-x^2-14x-49)\ge 0\\ -x^2-14x-24\ge 0\\ => \ x^2+14x+24\le 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x+3)(x+11)(x-7)^2\ge 0\\ (x+2)(x+12)\le 0\end{cases}$$

2) способ: вместо рационализации, сначала определить область значений относительно t, $\left[\begin{array}{l} t\ge 5\\ t\le 3\end{array}\right. \Rightarrow$

обратная замена и рационализация $\left[\begin{array}{l}\sqrt{-x^2-14x-24}\ge 5\\ \sqrt{-x^2-14x-24}\le 3\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2-14x-24\ge 25\\ 0\le -x^2-14x-24\le 9 |-25\end{array}\right. \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+14x+49\le 0\\ 16\le x^2+14x+49\le 25\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(x+7)^2\le 0\\ 16\le (x+7)^2\le 25\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ 4\le x+7\le 5\\ -5\le x+7\le -4\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0\\ -3\le x\le -2\\ -12\le x+7\le -11\end{array}\right.$$

**Ответ:** $[-12;-11]\cup[-7]\cup[-3;-2]$

# Решение примера из ЕГЭ

**Пример 4.** ***Задание №14***

**Решите неравенства.** $\frac{\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}}{x^2+x-1} \leq 0,$

**Равносильная система:**

Возводим в квадрат неравенство $\begin{cases} x^2-2x+1 \geq 0, \\ x^2+x \geq 0, \\ \frac{(x^2-2x+1)-(x^2+x)}{x^2+x-1} \leq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 \geq 0, \\ x(1+x) \geq 0, \\ \frac{3x-1}{x^2+x-1} \leq 0, \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x \in R, \\ x \geq 0, \\ x \leq -1, \\ \frac{-\sqrt{5}-1}{2} < x \leq \frac{1}{3}, \\ x > \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$$

**Ответ:** $\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}; -1\right] \cup \left[0; \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right).$

# Заключение

Иррациональные неравенства – довольно сложный раздел школьного курса математики, и на его изучение отведено крайне мало времени, то становится ясно, что учащиеся как правило это раздел усваивают с трудом.

В данном исследовании были рассмотрены основные методы решения иррациональных неравенств. Мы начали с определения иррациональных выражений, а затем перешли к решению иррациональных неравенств с помощью различных методов.

# СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!