

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
 федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
**«Чувашский государственный аграрный университет»**  
**(ФГБОУ ВО Чувашский ГАУ)**



СОГЛАСОВАНО

Директор И.В. Давыдов  
С.В. Меркушино  
 района

Чувашской Республики

« 26 » сентября 2023 г.

УТВЕРЖДАЮ

Начальник учебно-методического  
 управления

Е.Ю. Егорова

« 26 » сентября 2023 г.



**УЧЕБНЫЙ ПЛАН**

**курса «Решение задач повышенной сложности по математике»**

**Агроклассы**

Цель: повысить уровень компетентности при решении задач повышенной сложности по математике

Категория слушателей: школьники (11 класс)

Срок обучения: 7 месяцев

Форма обучения: очно-заочная

№	Наименование тем	Всего	Кол-во часов		Форма контроля
			Лекции	Практические занятия	
	<b>Алгебра и начала анализа</b>				
1	Преобразование выражений	2,5	0,5	2	-
2	Простые неравенства и системы неравенств	2,5	0,5	2	-
3	Логарифмические, показательные, тригонометрические неравенства и системы неравенств	2	0,5	1,5	-
4	Производная, ее геометрический и физический смысл	2,5	0,5	2	-
5	Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значение функций	2,5	1	1,5	-
6	Задачи оптимизации	5	1	4	-
7	Неравенства (повышенный уровень)	5	1	4	-
	<b>Геометрия</b>				
8	Стереометрия: объемы тел	2,5	1	1,5	-
9	Планиметрия (повышенный уровень)	4,5	1	3,5	-
10	Стереометрия (повышенный уровень)	5	1	4	-
	Итоговая аттестация	-	-	-	тестирование
	<b>Итого</b>	<b>34</b>	<b>8</b>	<b>26</b>	

Руководитель программы

*Деревянных Е.А.*

(Деревянных Е.А.)

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
**«Чувашский государственный аграрный университет»**  
**(ФГБОУ ВО Чувашский ГАУ)**

УТВЕРЖДАЮ

Начальник учебно-методического  
управления

  
Е.Ю. Егорова

« 25 » сентября 2023 г.



**ПРОГРАММА**  
**курса «Решение задач повышенной сложности по математике»**  
**Агроклассы**

**ОБЪЕМ УЧЕБНОЙ НАГРУЗКИ И ВИДЫ ОТЧЕТНОСТИ**

Лекции	8
Практические занятия	26
Индивидуальные занятия	-
Всего	34
Итоговая аттестация	-

Чебоксары  
2023 г.

## 1. Цели и задачи дисциплины

**Целью** изучения курса «Решение задач повышенной сложности по математике» в агроклассах является повышение уровня компетентности школьников при решении задач повышенной сложности по математике.

### **Задачи:**

- расширить кругозор школьников в области современной математики;
- рассмотреть некоторые вопросы, не входящие в школьный курс математики;
- повысить уровень подготовки школьников по решению задач повышенной сложности, соответствующих заданиям части 2 КИМ по математике.

Выпускник агроклассов должен:

### **Знать/Понимать:**

- свойства степеней, радикалов, логарифмов и тригонометрических функции;
- функции и их графики;
- виды уравнений и методы их решения;
- виды неравенств и методы их решения;
- простейшие математические модели;
- геометрические фигуры и тела, а также их свойства.

### **Уметь:**

- Выполнять практические расчеты по формулам, включая формулы, содержащие степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции, используя при необходимости справочные материалы и простейшие вычислительные устройства;
- строить и исследовать простейшие математические модели;
- описывать и исследовать с помощью функций реальные зависимости, представляя их графически;
- решать геометрические, физические, экономические и другие прикладные задачи, в том числе задачи на наибольшие и наименьшие значения с применением аппарата математического анализа;
- анализировать реальные числовые данные, представленные в виде диаграмм, графиков, анализировать информацию статистического характера;
- исследовать (моделировать) несложные практические ситуации на основе изученных формул и свойств фигур; вычислять длины, площади и объемы реальных объектов при решении практических задач, используя при необходимости справочники и вычислительные устройства.

**Использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:**

- Адекватного применения математики для решения возникающих в повседневной жизни проблем.

## 2. Содержание и структура

### 2.1. Наименование тем

1. Преобразование выражений
2. Простые неравенства и системы неравенств
3. Логарифмические, показательные, тригонометрические неравенства и системы неравенств
4. Производная, ее геометрический и физический смысл
5. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значение функций
6. Задачи оптимизации
7. Неравенства (повышенный уровень)
8. Стереометрия: объемы тел
9. Планиметрия (повышенный уровень)
10. Стереометрия (повышенный уровень)

### 2.2. Распределение времени по темам

№	Темы	Количество часов	
		ЛЗ	ПЗ
1	Преобразование выражений	0,5	2
2	Простые неравенства и системы неравенств	0,5	2
3	Логарифмические, показательные, тригонометрические неравенства и системы неравенств	0,5	1,5
4	Производная, ее геометрический и физический смысл	0,5	2
5	Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значение функций	1	1,5
6	Задачи оптимизации	1	4
7	Неравенства (повышенный уровень)	1	4
8	Стереометрия: объемы тел	1	1,5
9	Планиметрия (повышенный уровень)	1	3,5
10	Стереометрия (повышенный уровень)	1	4
Общая трудоемкость		8	26

### 2.3. Итоговая работа

Итоговый контроль знаний проводится с использованием соответствующих контрольно-измерительных материалов в виде теста, контролирующего освоение школьником программы обучения. Для получения зачета необходимо правильно ответить не менее чем на 50% вопросов.

### **3. Фонд оценочных средств**

#### **3.1. Перечень вопросов по изучаемым темам**

##### **1. Преобразования выражений**

- 1.1. Преобразования числовых рациональных выражений
- 1.2. Преобразования алгебраических выражений и дробей
- 1.3. Преобразования числовых иррациональных выражений
- 1.4. Преобразования буквенных иррациональных выражений
- 1.5. Вычисление значений степенных выражений
- 1.6. Действия со степенями
- 1.7. Преобразования числовых логарифмических выражений
- 1.8. Преобразования буквенных логарифмических выражений
- 1.9. Вычисление значений тригонометрических выражений
- 1.10. Преобразования числовых тригонометрических выражений
- 1.11. Преобразования буквенных тригонометрических выражений

##### **2. Простые неравенства и системы неравенств**

- 2.1. Линейные неравенства
- 2.2. Квадратные неравенства
- 2.3. Кубические неравенства
- 2.4. Дробно-рациональные неравенства
- 2.5. Иррациональные неравенства
- 2.6. Неравенства с модулем
- 2.7. Системы простейших неравенств
- 2.8. Разные задачи с неравенствами

##### **3. Логарифмические, показательные, тригонометрические неравенства и системы неравенств**

- 3.1. Простейшие логарифмические неравенства
- 3.2. Простейшие показательные неравенства
- 3.3. Простейшие тригонометрические неравенства
- 3.4. Системы простейших логарифмических и показательных неравенств
- 3.5. Системы простейших тригонометрических неравенств
- 3.6. Разные задачи с неравенствами

##### **4. Производная, ее геометрический и физический смысл**

- 4.1. Производная, основные понятия
- 4.2. Геометрический смысл производной, касательная
- 4.3. Физический смысл производной
- 4.4. Применение производной к исследованию функций

##### **5. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значение функций**

- 5.1. Исследование степенных и иррациональных функций
- 5.2. Исследование частных
- 5.3. Исследование произведений
- 5.4. Исследование показательных и логарифмических функций
- 5.5. Исследование тригонометрических функций
- 5.6. Исследование функций без помощи производной

## **6. Задачи оптимизации**

### **6.1. Задачи на оптимальный выбор**

## **7. Неравенства (повышенный уровень)**

### **7.1. Рациональные неравенства**

### **7.2. Иррациональные неравенства**

### **7.3. Показательные неравенства**

### **7.4. Логарифмические неравенства**

### **7.5. Неравенства с логарифмами по переменному основанию**

### **7.6. Неравенства с модулем**

### **7.7. Смешанные неравенства**

## **8. Стереометрия: объемы тел**

### **8.1. Куб**

### **8.2. Прямоугольный параллелепипед**

### **8.3. Элементы составных многогранников**

### **8.4. Площадь поверхности составного многогранника**

### **8.5. Объем составного многогранника**

### **8.6. Призма**

### **8.7. Параллелепипед и призма**

### **8.8. Пирамида**

### **8.9. Тетраэдр и пирамида**

### **8.10. Цилиндр**

### **8.11. Конус**

### **8.12. Шар**

### **8.13. Увеличение и уменьшение геометрических тел**

### **8.14. Комбинация тел**

## **9. Планиметрия: повышенный уровень**

### **9.1. Многоугольники и их свойства**

### **9.2. Окружности и системы окружностей**

### **9.3. Окружности и треугольники**

### **9.4. Окружности и четырёхугольники**

### **9.5. Задачи на доказательство и вычисление**

## **10. Стереометрия: повышенный уровень**

### **10.1. Задача на доказательство и вычисление**

### **10.2. Угол между скрещивающимися прямыми**

### **10.3. Угол между прямой и плоскостью**

### **10.4. Угол между плоскостями**

### **10.5. Расстояние от точки до прямой и до плоскости**

### **10.6. Расстояние между прямыми и плоскостями**

### **10.7. Сечения многогранников**

### **10.8. Объёмы многогранников**

### **10.9. Круглые тела: цилиндр, конус, шар**

### 3.2. Образцы тестовых заданий

1. Вычислите:  $4 + \log_3 2 - \log_9 36$ .
2. Вычислите:  $\log_5 50 + \log_{25} \frac{25}{4}$ .
3. Вычислите:  $\log_3 \frac{36}{5} + \frac{1}{\log_5 3} - \frac{1}{\log_4 3} - 1$ .
4. Вычислите:  $5^{3 \log_{25} 7 + 1}$ .
5. Найдите значение выражения  $\log_a (ab^3)$ , если  $\log_b a = \frac{1}{7}$ .
6. Найдите  $\log_a \frac{a}{b^3}$ , если  $\log_a b = 5$ .
7. Найдите значение выражения:  $\left( \frac{1}{\log_5 c} + \frac{1}{\log_4 c} \right) \log_{20} 16$  при  $c = \sqrt{2}$ .
8. Найдите наименьшее значение функции  $y = (x - 11)e^{x-10}$  на отрезке  $[9; 11]$
9. Найдите наибольшее значение функции  $y = \frac{14\sqrt{3}}{3} \cos x + \frac{7\sqrt{3}}{3} x - \frac{7\sqrt{3}\pi}{18} + 13$  на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .
10. Найдите наименьшее значение функции  $y = 16 \operatorname{tg} x - 16x - 4\pi + 7$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$
11. Найдите точку минимума функции  $y = (25 - x)e^{25-x}$ .
12. Найдите наименьшее значение функции  $y = 7x - \ln(x + 4)^7$  на отрезке  $[-3, 5; 0]$ .
13. Найдите точку минимума функции  $y = 4x - \ln(x + 8) + 12$ .
14. Найдите наибольшее значение функции  $y = \log_3(-73 - 20x - x^2) + 4$ .
15. Найдите наибольшее значение функции  $y = 3^{-219 - 30x - x^2}$ .
16. Найдите наибольшее значение функции  $y = \sqrt{33 - 8x - x^2}$ .
17. а) Решите уравнение  $4^{x^2 - 2x + 1} + 4^{x^2 - 2x} = 20$   
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-1; 2]$
18. а) Решите уравнение  $6 \log_8 x - 5 \log_8 x + 1 = 0$   
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[2; 2,5]$
19. а) Решите уравнение  $\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3$   
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$
20. В правильной четырехугольной пирамиде  $PABCD$ , все ребра которой равны 4, точка  $K$  — середина бокового ребра  $AP$ .  
а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку  $K$  и параллельной прямым  $PB$  и  $BC$ .  
б) Найдите площадь сечения.
21. Точка  $E$  — середина ребра  $CC_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите угол между прямыми  $BE$  и  $AD$ .

22. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с основанием  $ABC$  известны рёбра:  $AB = 21\sqrt{3}$ ,  $SC = 29$ . Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины рёбер  $AS$  и  $BC$ .

23. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с основанием  $ABC$  точка  $M$  — середина ребра  $SA$ , точка  $K$  — середина ребра  $SB$ . Найдите угол между плоскостями  $CMK$  и  $ABC$ , если  $SC = 6$ ,  $BC = 4$ .

24. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки  $C$  до прямой  $AD_1$ .

25. Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1 B_1 C_1$ , все ребра основания которой равны 2. Сечение, проходящее через боковое ребро  $AA_1$  и середину  $M$  ребра  $B_1 C_1$ , является квадратом. Найдите расстояние между прямыми  $A_1 B$  и  $AM$ .

26. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину  $S$  этой пирамиды и через диагональ её основания.

27. Правильные треугольники  $ABC$  и  $MBC$  лежат в перпендикулярных плоскостях,  $BC = 8$ . Точка  $P$  — середина  $CM$ , а точка  $T$  делит отрезок  $BM$  так, что  $BT:TM = 1:3$ . Вычислите объём пирамиды  $MPTA$ .

28. Радиус основания конуса равен 6, а его высота равна 8. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 4. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

29. Центр сферы, описанной вокруг пирамиды  $ABCD$ , лежит на ребре  $AB$ , а вершина  $D$  равноудалена от вершин  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Найдите расстояние между прямыми  $AB$  и  $CD$ , если известно, что радиус описанной вокруг  $ABCD$  сферы равен  $\sqrt{5}$ , а косинус угла между ребром  $AC$  и гранью  $ABD$  равен  $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ .

30. Решить неравенство:  $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{3-x} \leq 5$

31. Решить неравенство:  $\frac{1}{6x^2 - 5x} \geq \frac{1}{\sqrt{6x^2 - 5x + 1} - 1}$

32. Решить неравенство:  $5^x + \left(\frac{1}{5}\right)^x > 2$

33. Решить неравенство:  $x^2 \log_{25} x \geq \log_{25} x^3 + x \log_5 x$

34. Решить неравенство:  $\log_{x^2+x}(x^2 - 2x + 1) \leq 1$

35. Решить неравенство:  $3x - |x + 8| - |1 - x| \leq -6$

36. Решить неравенство:  $\sqrt{2 \cdot 9^x - 7 \cdot 3^{x+1} + 10} \geq 3^x - 10$

37. Два велосипедиста равномерно движутся по взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку этих дорог. Один из них движется со скоростью 40 км/ч и находится на расстоянии 5 км от перекрестка, второй движется со скоростью 30 км/ч и находится на расстоянии 3 км от перекрестка. через сколько минут расстояние между велосипедистами станет наименьшим? Каково будет это наименьшее расстояние.



38. Баржа грузоподъемностью 134 тонны перевозит контейнеры типов А и В. Количество загруженных на баржу контейнеров типа В не менее чем на 25% превосходит количество загруженных контейнеров типа А. Вес и стоимость одного контейнера типа А составляет 2 тонны и 5 млн. руб., контейнера типа В – 5 тонн и 7 млн. руб. соответственно. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость (в млн. руб.) всех контейнеров, перевозимых баржей при данных условиях.

#### 4. Литература

1. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва [и др.]. – М.: Просвещение, 2022. – 463 с.

2. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов [и др.]. – М.: Просвещение, 2022. – 400 с.

3. Геометрия 10-11 классы / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. В. Кадомцев [и др.]. – М.: Просвещение, 2022. – 287 с.

4. Материалы для подготовки к сдаче ЕГЭ по математике 2022-2023 гг.

Программу составил:

Доцент кафедры математики, физики и  
информационных технологий  
Деревянных Е.А.

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2023 г.



Согласовано:

Заведующий кафедрой математики,  
физики и информационных технологий,  
доцент к.ф.-м.н. Максимов А.Н.

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2023 г.

