Урок алгебры и начала анализа. 10-й класс "Обобщение и систематизация знаний по теме "Многочлены"

- Миронова Татьяна Николаевна, *учитель математики*

Цели: Обобщить и систематизировать теорию о многочленах от одной переменной, многочленах от нескольких переменных, приемы решения целых алгебраических уравнений в стандартных и нестандартных ситуациях.

Задачи:

Образовательные:

- повторить деление многочлена на многочлен с остатком, теорему Безу и следствие, теорему о целом корне многочлена, схему Горнера;
- сформировать у учащихся умения и закрепить навыки решения алгебраических уравнений;
- научить применять ключевые задачи не только в знакомой, но в модифицированной и незнакомой ситуациях.

Развивающие

- развить умения самостоятельного решения уравнений и задач, связанных с преобразованием многочленов;
- содействовать развитию устойчивого интереса к математике с помощью математической строгости умозаключения;
- ознакомить с логическими приемами мышления.

Воспитательные:

- воспитать чувство ответственности, формировать навыки самооценки;
- содействовать желанию расширить и углубить знания, полученные на уроке,
- воздействовать на мотивацию к учению с помощью историко-математического материала;
- содействовать повышению грамотности устной и письменной речи учащихся.

Тип урока: урок обобщения и систематизации знаний

Оборудование: компьютер, проектор, экран, плакат с заданиями “Устно”, “Разложить на множители”, “Решить уравнения”.

Раздаточный материал: “Треугольник Паскаля”, карточки для самостоятельной работы

Форма организации учебной деятельности: Индивидуальная, фронтальная, групповая, самопроверка.

План урока:

1. Организационный момент: вступительное слово учителя, в котором он подчеркивает значение материала изученной темы, сообщает цель и план урока (1 мин.)
2. Актуализация опорных знаний (8 мин.):

- повторение теории о многочленах: многочлены от одной переменной;
- многочлены от нескольких переменных (демонстрация слайдов);

3. Фронтальная работа “Устно” (3 мин.)
4. Решение задач (25 мин.):

I этап: алгебраические уравнения от одной переменной;
II этап: алгебраические уравнения от нескольких переменных;

а) работа в группах;
б) работа у доски;
в) работа с помощью интерактивной доски;

5. Самостоятельная работа учащихся (5 мин.)
6. Подведение итогов урока. Рефлексия (2 мин.)
7.Задание на дом, инструкция о его выполнении (1 мин.)

Ход урока

1. Организационный момент.

Сообщение темы, целей урока, практической значимости рассматриваемой темы.

1. Вступительное слово учителя

(На экране тема, цели и задачи урока.)

Тема “Многочлены” (многочлены от одной переменной, многочлены от нескольких переменных), актуальна, умение делить “углом” многочлен на многочлен, теорема Безу, следствие теоремы Безу, использование схемы Горнера при решении уравнений высших степеней позволит вам справиться с наиболее сложными заданиями ЕГЭ за курс средней школы.

Не надо боятся ошибиться, совет учиться на ошибках другого бесполезен, научиться чему-либо можно только на собственных ошибках. Как говорил Анатоль Франс (1844–1924) “Учиться можно только весело…. Чтобы переваривать знания, надо поглощать их с аппетитом”. Будьте активны, внимательны. Сегодня каждый из вас оценит свои знания сам.

2. Актуализация опорных знаний

Повторим формулы сокращенного умножения, которые мы с вами знаем.

У доски учащиеся записывают формулы квадрата суммы и разности, формулы куба суммы и куба разности двух выражений.

$(а + в)^2 = а^2+ 2ав + в^2$
$(а – в)^2 = а^2 – 2ав + в^2$
$(а + в)^3= а^3 + 3а^2в + 3ав^2 + в^3$
$(а – в)^3= а^3 – 3а^2в + 3ав^2 – в^3$

Попробуйте записать формулу для 4-ой степени

$(а+в)^4=(а+в)^3(а+в)=(а^3+3а^2в+3ав^2+в^3)(а+в)=$

$а^4 + \underline{3а^3в} + 3а^2в^2 + ав^3 + \underline{а^3в} + 3а^2в^2 + 3ав^3 + в^4 =$

$\mathbf{а^4 + 4а^3в + 6а^2в^2 + 4ав^3 + в^4}$.

и для 5-ой степени:

$(а + в)^5 = (а + в)^4(а + в) = (а^4 + 4а^3в + 6а^2в^2 + 4ав^3 + в^4)(а + в) =$

$а^5 + 4а^4в + 6а^3в^2 + 4а^2в^3 + в^4а + а^4в + 4а^3в^2 + 6а^2в^3 + 4ав^4 + в^5 =$

$\mathbf{а^5 + 5а^4в + 10а^3в^2 + 10а^2в^3 + 5ав^4 + в^5}$

Коэффициенты разложения степени бинома легко найти по следующей схеме, которая называется “треугольник Паскаля”, по имени французского математика Блез Паскаля (1623–1662)

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Каждый крайний элемент равен 1, а каждый не крайний элемент равен сумме двух своих верхних соседей.

Комментарий к презентации:

Блез Паскаль умер в 39 лет, но, несмотря на столь короткую жизнь, он вошел в историю как выдающийся математик, физик, философ и писатель. Его именем благодарными потомками названы единица давления(паскаль) и получивший чрезвычайно широкое распространение язык программирования. Но, наверное, самой известной математической работой Блеза Паскаля является “Трактат об арифметическом треугольнике”, образованном биноминальными коэффициентами, который имеет применение в теории вероятностей, комбинаторики, математическом анализе, теории чисел и обладает удивительными и занимательными свойствами. Кстати, одну из первых теорем в проективной геометрии Паскаль доказал в возрасте 16 лет.

Именно И.Ньютон в 1664–1665 гг. вывел формулу, выражающую степень двучлена для произвольных дробных и отрицательных показателей.

Найти разложение бинома (у каждого на парте треугольник Паскаля).

1. У доски вместе с учителем

№ 1. $\mathbf{(x + y)^5} = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

№ 2 $\mathbf{(1 + 2а)^4} = 1^4 + 4\cdot 1^3\cdot 2а + 6\cdot 1^2\cdot(2а)^2 + 4\cdot 1^1\cdot(2а)^3 + (2а)^4 =$

$1 + 8a + 24a^2 + 32a^3 + 16a^4$

№3 $(x – y)^6$ $= (x + (-y))^6 = x^6 + 6x^5(-y) + 15x^4(-y)^2 + 20x^3(-y)^3 +$

$15x^2(-y)^4 + 6x(-y)^5 + y^6 = x^6 – 6x^5y + 15x^4y^2 – 20x^3y^3 + 15x^2y^4 – 6xy^5 + y^6$.

2. Разложить на множители:

$x^3 - 3x^2 + 3x – 9$

$3x^3 – x^2 + 27x – 9$

3. Решить уравнение

1. $x^3 - 7x + 6 = 0$ (ответ: $x = 1$, $x = -3$, $x = 2$)

2. $x^3 - 19x - 30 = 0$

Решение: $x = - 2$ – корень уравнения $x^3 - 19x – 30$ среди делителей 30

$x^3 - 19x – 30 = (x + 2)(x^2 – 2x - 15)$ $(x + 2)(x^2 – 2x - 15) = 0$

Ответ: $x = -2$; $x = -3$; $x = 5$

3. $6x^3 + 11x^2 - 3x – 2 = 0$

Решение:

$6x^3 + 11x^2 - 3x – 2 = (x+2)(6x^2 – x – 1) = 0$,

$(x+2)(2x-1)(3x+1) = 0$

Ответ: : $x = - 2$, $x = 1/2$, $x = - 1/3$

(Последнее уравнение решают все, оставаясь на своих местах.)

4. “Схема Горнера”, *применение схемы Горнера:*

разделить $(x^7 - 2x^4 + 27x + 3)$ на $(x+2)$, используя схему Горнера

	1	0	0	-2	0	0	27	3
-2	1	-2	4	-10	20	-40	107	-211

$x^7 - 2x^4 + 27x + 3 = (x+2)(x^6 + 2x^5 + 4x^4 - 10x^3 + 20x^2 – 40x + 107) – 211$

5. Применение теоремы Безу

- Найти остаток от деления многочлена

$p(x)= 2x^2 – x – 3$ на двучлен $(x-2)$

Решение:

$p(2)= 2*2^2 – 2 – 3=3$

Ответ: $r=3$

Учитель: обратите внимание, корень $x= -1/3$ – свободный член приведенного многочлена $6x^3 + 11x^2 -3x – 2$

3. Учащиеся, справившиеся с заданием, засекая время, решают дальше

Разложить на множители:

$x^5 – x^4 – 5x^3 + x^2 + 8x + 4$;

ответ: $(x + 1)(x +1)(x +1)(x - 2)(x - 2))$

Решение проверяют по слайдам 15-17 (слайды содержат анимацию):

Решить уравнение: (решают у доски учащиеся с разных групп)

$y^3 – 2y^2 - 3y + 10 = 0$

Решение: Целочисленный корень уравнения $y = - 2$ среди делителей 10:

$(\pm1, \pm2, \pm5, \pm10)$. Разделив на $(y + 2)$ получим квадратный трехчлен $y^2 – 4y + 5$, не имеющий действительных корней

$y^3 – 2y^2 - 3y + 10 = (y+2)(y^2 - 4y + 5)$

$(y+2)(y^2 - 4y + 5) = 0$

Ответ: $y = - 2$

$y^3 + 4y^2 + 6y + 4 = 0$

Решение: $y = - 2$ делители 4: $(\pm1, \pm2, \pm4)$

$y^3 + 4y^2 + 6y + 4 = (y+2)(y^2 + 2y + 2)$

$(y+2)(y^2 + 2y + 2) = 0$ Ответ: $y = - 2$

$2x^3 – x^2 + 5x + 3 = 0$

Решение: Умножим обе части уравнения на 4: $8x^3 – 4x^2 + 20x + 12 = 0$

$(2x)^3 - (2x)^2 + 10(2x) + 12 = 0$. Введем $y = 2x$, получим $y^3 – y^2 + 10y + 12 = 0$.
Целочисленный корень $y = - 1$ находим среди делителей 12 (теорема 4)

Разделив на $(y + 1)$ получим квадратный трехчлен $y^2 – 2y + 12$, не имеющий действительных корней, Так как $x = y/2$, $x_1 = -1/2$ единственный корень. Ответ: $x_1 = -1/2$

Решить уравнения: а) $3 x^3 + 2 x^2 + 5 x - 2 = 0$; b)$4 x^3 - 10 x^2 + 14 x - 5 = 0$

Решение: b) Умножим обе части уравнения на 2: $8x^3 - 20 x^2 + 28 x - 10 = 0$

$(2x)^3 - 5 (2x)^2 + 14(2x) – 10 = 0$. Введем новую переменную $y = 2x$, получим

$y^3 – 5 y^2 + 14 y – 10 = 0$. Целочисленный корень уравнения очевиден:

$y =1$ среди делителей свободного члена 10: $(\pm1, \pm2, \pm5, \pm10)$. Разделив многочлен $y^3 – 5 y^2 + 14 y – 10$ на $(y -1)$, получим $y^2 – 4y + 10$, не имеющий действительных корней. Так как $x = y/2$, $x_1 =1/2$ единственный корень. *Ответ*: $x = 0{,}5$

$x (x-1) (x – 2) (x -3) = 24$

Решение уравнения $x (x-1) (x – 2) (x -3) = 24$ записывает ученик, используя интерактивную доску.

Решение: Заметим, что $x (x-1) = x^2 - 3x$, $(x-1) (x – 2) = x^2- 3x$

Перепишем уравнение в виде $(x^2- 3x)(x^2- 3x + 2) = 24$. Введем $y = x^2 - 3x$

Получим $y^2 + 2 y – 24 = 0$; $y_1= 4$ и $y_2= - 6$; Возвращаемся к переменной x, решаем два уравнения $x^2- 3x = 4$; $x^2 - 3x = - 6$. Из первого находим $x = 4$, $x= -1$, второе уравнение не имеет действительных корней. Ответ: 4; -1

II этап

Многочлены от нескольких переменных.

1. У экрана ученик демонстрирует разложение на множители многочлена от двух переменных двумя способами *(слайд 18-21)*

2. Разложить на множители (*одновременно учащиеся работают у доски*):

а) $6 m^2 -13 mn – 5n^2$ (решает ученик с первой группы)

Решение: Разложим на линейные множители квадратный трехчлен

$6 m^2 -13 m n – 5n^2$ от переменной m с коэффициентами 6; - 13 n; -5 n^2;

$m_1 = 5/2 n$, $m_2 = – 1/3 n$

$6 m^2 – 13 mn – 5n^2 = 6(m – 5/2 n)(m + 1/3 n)= (2m – 5 n) (3 m + n)$

Ответ: $6 m^2 – 13 mn – 5n^2 = (2m – 5 n) (3 m + n)$

б) $6a^2 – 5 a b – 6 b^2$ (решает ученик со второй группы)

Решение: Рассмотрим $6a^2 –5ab – 6b^2$ как квадратный, относительно <u>а</u> с коэффициентами 6; -5 b; – 6 b^2 , найдем корни $a_1 = -2/3 b$ или $a_2= 3/2 b$, получим

$6a^2 – 5ab – 6b^2 = 6(a +2/3\ b)(\ a - 3/2\ b)= (3a +2\ b)(\ 2a - 3\ b)$

в) $5x^2 + 27\ xy +10\ y$ (решают все с последующей самопроверкой слайд 21)

Решение:

$5x^2 + 27\ xy +10\ y = 5\ (x + 2y/5)\ (x+5y)$

$Д = 729\ y^2 – 200y^2 = 529\ y^2$

$x_1= - 2y/5,$

$x_2= - 5y$

3. **Учащийся:** Многочлен p (x;y) называют симметрическим, если он сохраняет свой вид при одновременной замене x на y и y на x

Систему двух уравнений с двумя переменными называют симметрической системой, если оба ее уравнения – симметрические. Решим симметрическую систему: (работает учащаяся на интерактивной доске)

$$\begin{cases} x^3 + x^3 y^3 + y^3 = 17. \\ x + x\ y + y = 5. \end{cases}$$

Решение: Введем две новые переменные x + y = u x y = v,

Воспользуемся выражением

$x^3 + y^3 = (x + y)^3 – 3x\ y\ (x + y)$, тогда система примет вид:

$$\begin{cases} u^3 – 3uv + v^3 = 17 \\ u + v = 5 \end{cases}$$

$u^3 – 3u\ (5 – u) + (5 – u)\ ^3 = 17;$

$u^3 – 15u + 3u^2 + 125 – 75\ u + 15u^2 - u^3 = 17:$

$18u^2 - 90u + 108 = 0;$

$u^2 - 5\ u + 6 = 0$: $u_1 = 2$, $u_2 = 3$, соответственно находим $v_1= 3$, $v_2= 2$.

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x\ y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3, \\ x\ y = 2; \end{cases}$$ итак, получим (1; 2); (2; 1),

Ответ: (1; 2); (2; 1).

5. Самостоятельная работа (5 мин.)

Решить уравнение: (слайд 22, 23 содержат анимацию):

1. $x^4 + 3x^3 - 13x^2 – 9x + 30=0$

Учащиеся проверяют свое решение по слайдам 22-23

Разложить на множители:

$8а^3 + 36а^2 в + 54ав^2 + 27в^3$

Решение: $8а^3 + 36а^2 в + 54ав^2 + 27в^3 = 8а^3 + 27в^3 + 36а^2 в + 54ав^2 = 8а^3 + 27в^3 + 18ав (2а +3в) = (2а)^3 + (3в)^3 + 18ав (2а +3в) = (2а +3в) (4а^2 -6ав + 9в^2)$

$+ 18ав (2а +3в) = (2а +3в) (4а^2 - 6ав + 9в^2 + 18 ав) =(2а +3в) (4а^2 +9ав + 9в^2) = (2а +3в)^3$

Ответ: $(2а +3в)^3$

6. Подведение итогов урока. Рефлексия

Учитель: Какие затруднения испытывали при решении уравнений высших степеней?

Учитель комментирует ответы учащихся, выставляя отметки в журнал.

7. Задание на дом, инструкция о его выполнении

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x^4 + y^4 = 17 \end{cases}$$

При каких значениях параметра <u>а</u> многочлен

$(x^2 +(2a +1) x + 2a)(x^2 - (a +2) x + 2a)(x-1)$ имеет кратные корни? Найдите эти корни (Филиппова М, Филиппов В, Филиппов Д, Головин А. Ятманов П , Войнов А.)

4. Вывести формулу квадрата суммы четырёх слагаемых.